$1^{η}$ δεκάδα θεμάτων επανάληψης

1.

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $ρ = 1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου

ii) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x - 1)$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 + 4 = x^2 + 4x$

iv) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση του πολυωνύμου $P(x)$ είναι χαμηλότερα από τον άξονα των x.

Προτεινόμενη λύση

i)

$P(1) = 1^3 - 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 0$, άρα ο $ρ = 1$ είναι ρίζα του $P(x)$

ii)

$1^{ος}$ τρόπος

Horner για το P(x)

1	−1	−4	4	ρ = 1
	1	0	−4	
1	0	−4	0	

Οπότε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$ είναι $π(x) = x^2 - 4$

$2^{ος}$ τρόπος

Η πράξη της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - 1)$ δίνει πηλίκο $π(x) = x^2 - 4$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - x^2 - 4x + 4 & x-1 \\ \cline{2-2}
-x^3 + x^2 & x^2 - 4 \\ \cline{1-1}
-4x + 4 & \\
4x - 4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

iii)

$x^3 + 4 = x^2 + 4x \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

$P(x) = 0$

$(x - 1)(x^2 - 4) = 0$

$x - 1 = 0$ ή $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 1$ ή $x = -2$ ή $x = 2$

iv)

Πρόσημο του πολυωνύμου P(x)

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
P(x)		−	0	+	0	−	0	+	

Πρέπει και αρκεί $P(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$ ή $1 < x < 2$

2.

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (k - 2)x^3 - x^2 + kx + 1$, $k \in \mathbb{R}$

i) Για τις διάφορες τιμές του k να βρείτε τον βαθμό του P(x)

ii) Αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του P(x) να δείξτε ότι $k = 1$

iii) Όταν $k = 1$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

iv) Όταν $k = 3$ δείξτε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες λύσεις

Προτεινόμενη λύση

i)

Αν $k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$ το πολυώνυμο γίνεται $P(x) = -x^2 + 2x + 1$ το οποίο είναι 2ου βαθμού

Αν $k - 2 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 2$ το πολυώνυμο είναι τρίτου βαθμού

ii)

Αφού το $x - 1$ είναι παράγοντας του P(x) ισχύει ότι

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$k - 2 - 1 + k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

iii)

Για $k = 1$ το P(x) γίνεται $P(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$ οπότε

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x^3 - x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x^2(x + 1) + (x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 1)(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ ή } x = -1 \text{ (διπλή)}$$

iv)

Όταν $k = 3$ η εξίσωση $P(x) = 0$ γίνεται

$$x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$$

πιθανές ακέραιες ρίζες είναι μόνο οι διαιρέτες 1 και -1 του σταθερού όρου 1 της εξίσωσης

εύκολα διαπιστώνουμε ότι καμία από αυτές δεν επαληθεύει την εξίσωση συνεπώς η εξίσωση δεν έχει ακέραιες ρίζες

3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -10 + 4ημ2x$

i) Να βρείτε την περίοδο καθώς επίσης τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

ii) Να βρείτε τα x για τα οποία η τιμή της f είναι -12

iii) Από τα x που βρήκατε στο (ii), ποια ανήκουν στο διάστημα $[-\pi, \pi]$;

iv) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία σε διάστημα πλάτους ίσο με την περίοδό της.

Προτεινόμενη λύση

i)

$D_f = \mathbb{R}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 4ημ2x, \quad x \in \mathbb{R}$

Η g είναι της μορφής $ρημ(ωx)$ με $ρ = 4$ και $ω = 2$.

Άρα είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Η μέγιστη τιμή της είναι 4 και η ελάχιστη –4.

Η γραφική παράσταση C_f της f προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της C_g κατά 10 μονάδες προς τα κάτω. Άρα και η f είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$

$f_{max} = -10 + g_{max} = -10 + 4 = -6$ και $f_{min} = -10 + g_{min} = -10 - 4 = -14$

ii)

$$f(x) = -12 \Leftrightarrow -10 + 4ημ2x = -12$$
$$4ημ2x = -2$$
$$ημ2x = -\frac{1}{2}$$
$$ημ2x = -ημ\frac{\pi}{6}$$
$$ημ2x = ημ\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad ή \quad 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6}, \ k \in \mathbb{Z}$$
$$x = k\pi - \frac{\pi}{12} \quad \textbf{(1)} \quad ή \quad x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \quad \textbf{(2)}$$

iii)

$$-\pi \le x \le \pi \overset{(1)}{\Leftrightarrow} -\pi \le k\pi - \frac{\pi}{12} \le \pi$$
$$-1 \le k - \frac{1}{12} \le 1$$
$$-1 + \frac{1}{12} \le k \le 1 + \frac{1}{12}$$
$$-\frac{11}{12} \le k \le \frac{13}{12} \Leftrightarrow k = 0 \quad ή \quad k = 1 .$$

Για $k = 0$ η (1) δίνει $x = -\frac{\pi}{12}$ και για $k = 1$ η (1) δίνει $x = \frac{11\pi}{12}$

Ομοίως $-\pi \le x \le \pi \overset{(2)}{\Leftrightarrow} x = -\frac{5\pi}{12}$ ή $x = \frac{7\pi}{12}$

ν)

Μονοτονία της συνάρτησης g στο διάστημα $[0, \pi]$

x	0		π/4		2π/4		3π/4		π
f(x)	0	↗	4	↘	0	↘	−4	↗	0

Λόγω της κατακόρυφης μετατόπισης, η μονοτονία της f είναι ίδια με τη μονοτονία της g.

4.

Έστω τα συστήματα

$$\Sigma_1 : \begin{cases} (\alpha+1)x - \beta\, y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases} \qquad \Sigma_2 : \begin{cases} x + (\beta+2)y = \alpha^2 + 1 \\ x - (\alpha-1)\, y = \beta^3 \end{cases} \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

δείξτε ότι όταν το Σ_1 είναι αόριστο τότε το Σ_2 είναι αδύνατο .

Προτεινόμενη λύση

Για να είναι το Σ_1 είναι αόριστο , δεδομένου ότι υπάρχει συντελεστής των αγνώστων διάφορος από το 0 , θα πρέπει για τις ορίζουσες αυτού να ισχύουν

$D = 0$ και $Dx = 0$ και $Dy = 0$ δηλαδή

$$\begin{vmatrix} \alpha+1 & -\beta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ και } \begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ και } \begin{vmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$(\alpha + 1 + \beta = 0 \text{ και } 1 - \beta = 0 \text{ και } -\alpha - 1 - 1 = 0) \iff$$

$$\alpha = -2 \text{ και } \beta = 1$$

Γι' αυτές τις τιμές το Σ_2 γίνεται

$$\Sigma_2 : \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + 3\, y = 1 \end{cases} \text{ το οποίο είναι φανερά αδύνατο}$$

5.

i) Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$

ii) Να γράψετε το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που περιέχει έναν παράγοντα του πολυωνύμου της στήλης Α

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. x^2-3x+2	**1.** $x-\alpha$
β. x^2-9	**2.** $x+\alpha$
γ. $x^3-2\alpha x^2+\alpha^3$	**3.** $x-3$
	4. $x-1$

iii) Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^{2000} + \lambda x - 2$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει παράγοντα το $(x-1)$ τότε το λ ισούται με Α . -1 , Β. 1, Γ. 0, Δ. 2, Ε. -2

Γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

Προτεινόμενη λύση

i)

Ευθύ : Έστω ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)$.

Τότε θα ισχύει $P(x) = (x-\rho)\pi(x)$

Για $x = \rho$ η ισότητα αυτή δίνει $P(\rho) = (\rho-\rho)\pi(\rho) = 0$

Αντίστροφο : Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή $P(\rho) = 0$.

Ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) = (x-\rho)\pi(x) + P(\rho) \Rightarrow$

$P(x) = (x-\rho)\pi(x) \Rightarrow$

$(x-\rho)$ παράγοντας του $P(x)$

ii)

α. 4, β. 3, γ.1

iii)

Β.

6.

Έστω η συνάρτηση

$f(x) = \alpha(\log x)^4 + 8(\log x)^2\log(100x)$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

i) Αν $f(10) = 25$ δείξτε ότι $\alpha = 1$

ii) Για $\alpha = 1$

α) Δείξτε ότι $f(x) = (\log^2 x + 4\log x)^2$

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

Λύση

i) Αν $f(10) = 25 \Leftrightarrow$

$$\alpha(\log 10)^4 + 8(\log 10)^2\log(100\cdot 10) = 25 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\cdot 1 + 8\cdot 1\cdot \log(1000) = 25 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + 8\cdot 1\cdot 3 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

ii) α) $f(x) = (\log x)^4 + 8(\log x)^2(\log 100 + \log x) =$

$$= (\log x)^4 + 8(\log x)^2(2 + \log x) =$$

$$= (\log x)^4 + 16(\log x)^2 + 8(\log x)^3 =$$

$$= (\log^2 x + 4\log x)^2$$

β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$(\log^2 x + 4\log x)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\log^2 x + 4\log x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\log x(\log x + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\log x = 0 \text{ ή } \log x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\log x = 0 \text{ ή } \log x = -4 \quad \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 10^{-4}$$

7.

Να λυθούν οι εξισώσεις **i)** $ημ^2 5x - ημ^2(x-45^o) = 0$

ii) $ημ^2\left(x+\frac{π}{6}\right) + συν^2 3x = 1$

Προτεινόμενη λύση

i)

$ημ^2 5x - ημ^2(x-45^o) = 0 \Leftrightarrow [ημ5x - ημ(x-45^o)][ημ5x + ημ(x-45^o)] = 0$

$ημ5x - ημ(x-45^o) = 0$ ή $ημ5x + ημ(x-45^o) = 0$

$ημ5x = ημ(x-45^o)$ ή $ημ5x = -ημ(x-45^o)$

- $ημ5x = ημ(x-45^o) \Leftrightarrow 5x = 360^o k + (x-45^o)$ ή $5x = 360^o k + 180^o - (x-45^o)$

  $4x = 360^o k - 45^o$ ή $6x = 360^o k + 225^o$

  $x = 90^o k - 11{,}25^o$ ή $x = 60^o k - 37{,}5^o$, $k \in \mathbb{Z}$

- $ημ5x = ημ(-x+45^o) \Leftrightarrow$

  $5x = 360^o k + (-x+45^o)$ ή $5x = 360^o k + 180^o - (-x+45^o)$

  $x = 60^o k + 7{,}5^o$ ή $x = 90^o k + 33{,}75^o$, $k \in \mathbb{Z}$

ii)

$ημ^2\left(x+\frac{π}{6}\right) + συν^2 3x = 1 \Leftrightarrow ημ^2\left(x+\frac{π}{6}\right) + 1 - ημ^2 3x = 1$

$ημ^2\left(x+\frac{π}{6}\right) = ημ^2 3x$

$ημ\left(x+\frac{π}{6}\right) = ημ3x$ ή $ημ\left(x+\frac{π}{6}\right) = -ημ3x$

- $ημ\left(x+\frac{π}{6}\right) = ημ3x \Leftrightarrow x+\frac{π}{6} = 2kπ + 3x$ ή $x+\frac{π}{6} = 2kπ + π - 3x$

  $-2x = 2kπ - \frac{π}{6}$ ή $4x = 2kπ + \frac{5π}{6}$

  $x = -kπ + \frac{π}{12}$ ή $x = \frac{kπ}{2} + \frac{5π}{24}$, $k \in \mathbb{Z}$

- $ημ\left(x+\frac{π}{6}\right) = -ημ3x \Leftrightarrow ημ\left(x+\frac{π}{6}\right) = ημ(-3x)$

  Ομοίως βρίσκουμε

  $x = \frac{kπ}{2} - \frac{π}{24}$ ή $x = -kπ - \frac{5π}{12}$, $k \in \mathbb{Z}$

8.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 4-3ημ2x$

i) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και την περίοδο T της συνάρτησης

ii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$

iii) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

Προτεινόμενη λύση

i)

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4-3ημ\left[2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 4-3ημ\frac{\pi}{2} = 4-3 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4-3ημ\left[2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right] = 4-3ημ\frac{\pi}{4} = 4-3\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8-3\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4-3ημ\left[2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 4-3ημ\frac{2\pi}{3} = 4-3ημ\frac{\pi}{3} = 4-3\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8-3\sqrt{3}}{2}$$

Η περίοδος T της συνάρτησης δίνεται από τον τύπο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, όπου ω = 2 επομένως

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

ii)

$$f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 4-3ημ2x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow ημ2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$ημ2x = ημ\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left(2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{12} \text{ ή } x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \text{ , } k \in \mathbb{Z}$$

iii)

Από γνωστή θεωρία η συνάρτηση $g(x) = -3ημ2x$ έχει μέγιστη τιμή το $|-3| = 3$ και ελάχιστη το $-|-3| = -3$ επομένως η $f(x) = 4 - 3ημ2x$ έχει μέγιστη τιμή την $4 + 3 = 7$ και ελάχιστη την $4-3 = 1$

9.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha-1}{5}\right)^x$

i) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$

ii) Για ποιες τιμές του α η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα;

iii) Αν $\alpha = 11$ να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(2x+1) = 6$

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει να είναι $\frac{\alpha-1}{5} > 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$

ii)

Πρέπει να είναι $\frac{\alpha-1}{5} > 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 5 \Leftrightarrow \alpha > 6$

iii)

Για $\alpha = 11$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = 2^x$

$f(x) + f(2x+1) = 6 \Leftrightarrow 2^x + 2^{2x+1} = 6$

$2^x + 2 \cdot 2^{2x} = 6$ (Θέτουμε $2^x = y > 0$)

$y + 2y^2 = 6$

$2y^2 + y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$ ή $y = \cancel{-2}$

$2^x = \frac{3}{2}$

$\ln 2^x = \ln\frac{3}{2}$

$x\ln 2 = \ln 3 - \ln 2$

$x = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2}$

10.

Έστω ένα πολυώνυμο P(x) βαθμού $\nu \geq 2$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$8(x-1)P(x) - xP(2x+3) = -52x^3 - 8x^2 - 6x - 16$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x –1 να είναι 2

i) Να δικαιολογήσετε γιατί το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 6x + 5)$ θα είναι της μορφής $\upsilon(x) = \alpha x + \beta$

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 20$ και $\beta = -18$

iii) Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 6x + 5)$ είναι το $\pi(x) = x + 4$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης του P(x) με τον άξονα των y

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης του P(x) με την ευθεία y = 2

γ) Να βρείτε τα διαστήματα των τιμών του x για τα οποία η γραφική παράσταση του P(x) είναι ψηλότερα από την ευθεία y = 2

Προτεινόμενη λύση

i)

Επειδή στην διαίρεση $P(x) : (x^2 - 6x + 5)$ ο διαιρέτης $x^2 - 6x + 5$ είναι πολυώνυμο 2[ου] βαθμού , το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι πολυώνυμο το πολύ πρώτου βαθμού άρα θα είναι της μορφής $\upsilon(x) = \alpha x + \beta$

ii)

Αν π(x) είναι το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 6x + 5)$ τότε με βάση την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε

$P(x) = (x^2 - 6x + 5)\pi(x) + \alpha x + \beta$ **(1)**

Η **(1)** για x = 1 δίνει $P(1) = \alpha + \beta$ και για x = 5 δίνει $P(5) = 5\alpha + \beta$

(παρατήρησε ότι τα 1 και 5 είναι οι ρίζες του διαιρέτη)

Όμως από την υπόθεση ξέρουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$ είναι 2

άρα P(1) = 2 συνεπώς $\alpha + \beta = 2$ **(2)**

Επίσης η $8(x-1)P(x) - xP(2x+3) = -52x^3 - 8x^2 - 6x - 16$ για x = 1 δίνει

P(5) = 82 άρα $5\alpha + \beta = 82$ **(3)**

Λύνοντας το σύστημα των **(2)** και **(3)** βρίσκουμε ότι $\alpha = 20$ και $\beta = -18$

iii)

Από τα δεδομένα του προβλήματος η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του P(x) με το $x^2 - 6x + 5$ γίνεται $P(x) = (x^2 - 6x + 5)(x + 4) + 20x - 18$ **(4)**

α)

Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης του P(x) με τον άξονα των y έχει τετμημένη 0 και τεταγμένη λόγω της **(4)** P(0) = 2 άρα είναι το (0, 2)

β)

Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης του P(x) με την ευθεία y = 2 έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης P(x) = 2 και λόγω της (4)

$(x^2 - 6x + 5)(x + 4) + 20x - 18 = 2 \Leftrightarrow$

$(x^2 - 6x + 5)(x + 4) + 20x - 20 = 0 \Leftrightarrow \ldots.. \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ (διπλή)

Οπότε τα σημεία τομής είναι τα (0, 2) και (1 , 2)

γ)

Η γραφική παράσταση του P(x) είναι ψηλότερα από την ευθεία y = 2 για τα x εκείνα που ισχύει P(x) > 2

όπως είδαμε στο **(β)** οι ρίζες της εξίσωσης P(x) = 2 είναι το 0 και το 1 διπλή

το πρόσημο του P(x) –2 φαίνεται στον παρακάτω άξονα

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Πρόσημο του P(x) –2		–	0	+	0	+	

Από τον άξονα βλέπουμε ότι P(x) > 2 όταν $x > 0$ και $x \neq 1$